一

(a)假设一个反射镜左右两侧向右传播的光振幅为 1 和 x

向左传播的振幅为$r+\frac{t(t-x)}{r}$和$\frac{t-x}{r}$

由于平移对称性并考虑到相位差$\frac{\frac{t-x}{r}}{x}=(r+\frac{t(t-x)}{r})e^{2ika}$

得到关于 x 的二次方程$tx^2-\left(1+e^{-2ika}\right)x+te^{-2ika}=0$

x 的解为$\frac{1+e^{-2ika}\pm\sqrt{1+e^{-4ika}+(2-4t^2)e^{-2ika}}}{2t}=\frac{1+e^{-2ika}\pm\sqrt{(e^{-2ika}-p)(e^{-2ika}-q)}}{2t}$

其中$p,q=(2t^2-1)\pm i\sqrt{1-(2t^2-1)^2}$

故高反射区间满足$2\pi-\cos^{-1}(2t^2-1)\le 2ka\le 2\pi+\cos^{-1}(2t^2-1)$

即$\frac{4\pi a}{2\pi+\cos^{-1}(2t^2-1)}<\lambda<\frac{4\pi a}{2\pi-\cos^{-1}(2t^2-1)}$

(b)

带入得

$$C^2+X^2=1$$
$$C^2E_{low}+X^2E_{upp}=E_1$$
$$C^2E_{upp}+X^2E_{low}=E_2$$
$$CX(E_{low}-E_{upp})=g$$

解得

$$E_{upp},E_{low}=\frac{E_1+E_2\pm\sqrt{(E_1-E_2)^2+4g^2}}{2}$$

(c)

$$k_x=\frac{(2k+1)\pi}{a}$$

$$k_y=\sqrt{k^2-(\frac{(2k+1)\pi}{a})^2}=k-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{2ka^2}$$

差值为$\frac{4\pi^2}{ka^2}$的整数倍，因此周期$L=\frac{ka^2}{2\pi}=\frac{a^2}{\lambda}$

波长为3.0μm

二

(a)假设重物下降 x，倾斜角度θ

竖直方向受力平衡$2mg=\int_0^{\frac{x}{\theta}}2a(x-\theta t)kdt$

重物所在轴力矩平衡$mga=\int_0^{\frac{x}{\theta}}2a(x-\theta t)ktdt$

积分得$\frac{x}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2-\frac{\theta}{3}\left(\frac{x}{\theta}\right)^3=\frac{mg}{2k},x\frac{x}{\theta}-\frac{\theta}{2}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2=\frac{mg}{ak}$

解得$\frac{x}{\theta}=\frac{3a}{2},x=\frac{4mg}{3ka^2},a\theta=\frac{8mg}{9ka^2}$

接触面积$3a^2$

(b)

动能$T=\frac{m}{2}\left(\left(\dot{x}-a\dot{\theta}\right)^2+\dot{x}^2\right)+\frac{ma^2}{6}\dot{\theta}^2=m\dot{x}^2-m\dot{x}a\dot{\theta}+\frac{2m}{3}a^2\dot{\theta}^2$

势能$V=\int_0^{\frac{x}{\theta}}a(x-\theta t)^2kdt-mgx-mg(x-\theta a)=\frac{ax^3k}{3\theta}-mg(2x-\theta a)$

令$x=\frac{4mg}{3ka^2}+u, a\theta=\frac{8mg}{9ka^2}+v$

$$T=\ m\dot{u}^2-m\dot{u}\dot{v}+\frac{2m}{3}\dot{v}^2$$

$$V=\frac{3a^2k}{2}u^2-\frac{9a^2k}{4}uv+\frac{9a^2k}{8}v^2$$

带入后解得

$$\omega=\sqrt{\frac{24\pm 3\sqrt{19}}{20}\frac{a^2k}{m}}$$

三

(a)AB 杆 x 方向投影$a=\sqrt{1-(\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)})^2}=0.5257$

受力$F_1=\frac{F}{5a}=0.3804F$

(b)BC 杆 x 方向投影$b=\sqrt{1-(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)})^2}=0.8507$,yz 平面内投影$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$刚好等于 a

受力$F_2=\frac{F}{10b}=0.1176F$

(c)$F_3=\frac{2aF_2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)+bF_1}{2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}=0.3078F$

四

(a)$\frac{q\frac{qR}{x}}{4\pi\varepsilon_0(\frac{R^2}{x})^2}=\frac{q^2x}{4\pi\varepsilon_0R^3}$

(b)

每一处可以近似看成平板电容器，极板间距$d=R-r-\cos(\theta)x$

得到电荷面密度和单位面积受力$\sigma=\frac{\varepsilon_0U}{d}, P=\frac{\varepsilon_0U^2}{2d^2}=\frac{\varepsilon_0U^2}{2(R-r)^2}\left(1+\frac{2\cos(\theta)x}{(R-r)}\right)$

积分得到总静电力$F=\int_0^{\pi}Pcos(\theta)2\pi R^2\sin(\theta)d\theta=\frac{4\varepsilon_0U^2x\pi R^2}{3(R-r)^3}=\frac{q^2x}{12\pi\varepsilon_0R^2(R-r)}$

其中$U=\frac{q(R-r)}{4\pi\varepsilon_0Rr}$

五

（a）

电场分布$E=\frac{UrR}{(R-r)\rho^2}$

电子做半径$r_0=\frac{R+r}{2}$的圆周运动，动能$T=\frac{eUrR}{(R^2-r^2)}$

(b)

写出极坐标轨道方程$\rho=\frac{p}{1-e\cos(\theta)}$

$$\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}=\frac{2}{p}=\frac{eUrR}{Tr_0{}^2\cos^2(\alpha)(R-r)}$$

其中$r_0=\frac{R+r}{2}$代表狭缝位置，r_1为落在 mcp 上的位置

$$\frac{1}{r_1}=\frac{eUrR}{Tr_0{}^2\cos^2(\alpha)(R-r)}-\frac{1}{r_0}=\frac{4(R^2-r^2)}{r_0{}^2\cos^2(\alpha)(R-r)}-\frac{1}{r_0}=\frac{2-\cos^2(\alpha)}{r_0\cos^2(\alpha)}$$

区间为$\frac{r_0\cos^2(\alpha)}{2-\cos^2(\alpha)}\sim r_0$

(c)

$$\frac{1}{r_1}=\frac{eUrR}{\left(\frac{eUrR}{(R^2-r^2)}+\Delta E\right)r_0{}^2(R-r)}-\frac{1}{r_0}=\frac{2eUrR}{\left(eUrR+\Delta E(R^2-r^2)\right)r_0}-\frac{1}{r_0}$$

$$r_1=r_0\frac{eUrR+\Delta E(R^2-r^2)}{eUrR-\Delta E(R^2-r^2)}$$

六

(a)

磁通量$\psi=\mathrm{M_0}\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{I_0}\cos(\omega_0 t)=\frac{\mathrm{M_0 I_0}}{2}\left(\cos\left((\omega+\omega_0)t+\varphi\right)+\cos\left((\omega-\omega_0)t+\varphi\right)\right)$

电动势$\mathrm{E}=\frac{\mathrm{M_0 I_0}}{2}\left((\omega+\omega_0)\sin\left((\omega+\omega_0)t+\varphi\right)+(\omega-\omega_0)\sin\left((\omega-\omega_0)t+\varphi\right)\right)$

力矩

$$\frac{EI_1}{R}\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}\theta}$$

$$=-\frac{\mathrm{M_0}^2\mathrm{I_0}^2}{2R}\left((\omega+\omega_0)\sin\left((\omega+\omega_0)t+\varphi\right)+(\omega-\omega_0)\sin\left((\omega-\omega_0)t+\varphi\right)\right)\sin(\omega t+\varphi)\cos(\omega_0 t)$$

$$=-\frac{\mathrm{M_0}^2\mathrm{I_0}^2}{4R}\left((\omega+\omega_0)\sin\left((\omega+\omega_0)t+\varphi\right)+(\omega-\omega_0)\sin\left((\omega-\omega_0)t+\varphi\right)\right)\left(\sin\left((\omega+\omega_0)t+\varphi\right)+\sin\left((\omega-\omega_0)t+\varphi\right)\right)$$

平均值

$$-\frac{\mathrm{M_0}^2\mathrm{I_0}^2\omega}{4R}$$

(b)

磁通量 $\psi=\mathrm{M_0}\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{I_0}\cos(\omega_0 t)+\mathrm{M_0}\sin(\omega t+\varphi)\,\mathrm{I_0}\sin(\omega_0 t)=\mathrm{M_0 I_0}\cos\left((\omega-\omega_0)t+\varphi\right)$

电动势$\mathrm{E}=\mathrm{M_0 I_0}\,(\omega-\omega_0)\sin\left((\omega-\omega_0)t+\varphi\right)$

力矩

$$\frac{E}{R}\left(\mathrm{I_1}\frac{\mathrm{dM_1}}{\mathrm{d}\theta}+\mathrm{I_2}\frac{\mathrm{dM_2}}{\mathrm{d}\theta}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{M_0}^2\mathrm{I_0}^2}{R}(\omega-\omega_0)\sin\left((\omega-\omega_0)t+\varphi\right)\left(-\cos(\omega_0 t)\sin(\omega t+\varphi)+\sin(\omega_0 t)\cos(\omega t+\varphi)\right)$$

$$=-\frac{\mathrm{M_0}^2\mathrm{I_0}^2}{R}(\omega-\omega_0)\sin^2\left((\omega-\omega_0)t+\varphi\right)$$

平均值

$$\frac{M_0{}^2 I_0{}^2(\omega_0-\omega)}{2R}$$

(c) 电动势$E=\frac{M_0 I_0}{2}\Big((\omega+\omega_0)\sin\big((\omega+\omega_0)t+\varphi\big)+(\omega-\omega_0)\sin\big((\omega-\omega_0)t+\varphi\big)\Big)$

电流

$$I=\frac{M_0 I_0}{2}\left((\omega+\omega_0)\left(\frac{R}{R^2+L^2(\omega+\omega_0)^2}\sin\big((\omega+\omega_0)t+\varphi\big)-\frac{L(\omega+\omega_0)}{R^2+L^2(\omega+\omega_0)^2}\cos\big((\omega+\omega_0)t+\varphi\big)\right)+(\omega-\omega_0)\left(\frac{R}{R^2+L^2(\omega-\omega_0)^2}\sin\big((\omega-\omega_0)t+\varphi\big)-\frac{L(\omega-\omega_0)}{R^2+L^2(\omega-\omega_0)^2}\cos\big((\omega-\omega_0)t+\varphi\big)\right)\right)$$

力矩

$$II_1\frac{dM}{d\theta}=-\frac{M_0{}^2 I_0{}^2}{2}\left((\omega+\omega_0)\left(\frac{R}{R^2+L^2(\omega+\omega_0)^2}\sin\big((\omega+\omega_0)t+\varphi\big)-\frac{L(\omega+\omega_0)}{R^2+L^2(\omega+\omega_0)^2}\cos\big((\omega+\omega_0)t+\varphi\big)\right)+(\omega-\omega_0)\left(\frac{R}{R^2+L^2(\omega-\omega_0)^2}\sin\big((\omega-\omega_0)t+\varphi\big)-\frac{L(\omega-\omega_0)}{R^2+L^2(\omega-\omega_0)^2}\cos\big((\omega-\omega_0)t+\varphi\big)\right)\right)\Big(\sin\big((\omega+\omega_0)t+\varphi\big)+\sin\big((\omega-\omega_0)t+\varphi\big)\Big)$$

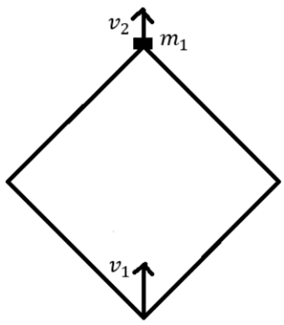
平均值

$$-\frac{M_0{}^2 I_0{}^2}{4}\left(\frac{R(\omega+\omega_0)}{R^2+L^2(\omega+\omega_0)^2}+\frac{R(\omega-\omega_0)}{R^2+L^2(\omega-\omega_0)^2}\right)$$

七

考虑一个正方形框架，一个顶点上附加质量m_1

写出动能



$$T=\frac{m_1}{2}{v_2}^2+\frac{m}{3}\left(\frac{5}{2}{v_1}^2+\frac{5}{2}{v_2}^2+v_1v_2\right)$$

假设下方受到向上的大小为 F 的力

可以得到两顶点的加速度满足方程

$$\left(m_1+\frac{5m}{3}\right)a_2+\frac{m}{3}a_1=0$$

$$\frac{5m}{3}a_1+\frac{m}{3}a_2=F$$

解得

$$F=\frac{5m_1+8m}{3m_1+5m}ma_1$$

如果只有一个框架$a_1 = g$，$m_1 = 0$，$F = \frac{8}{5}mg$

如果由无穷多个框架，由于自相似$F = m_1 a_1$

解得$F = \sqrt{\frac{8}{3}}mg$

八

(a)

假设杆上两物体向右速度为v_1, v_2下方物体为$(\frac{v_1+v_2}{2}, \frac{\sqrt{3}(v_1-v_2)}{6})$

x 方向动量

$$2\mathrm{m}v_1 + m\frac{v_1+v_2}{2} + mv_2 = 0$$

重力做功等于动能增加

$$\frac{1}{2}(2\mathrm{m}{v_1}^2 + \mathrm{m}\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)^2 + m\left(\frac{\sqrt{3}(v_1-v_2)}{6}\right)^2 + m{v_2}^2 = mgy = \frac{\sqrt{3}}{2}mgl$$

解得

$$v_1 = \sqrt{\frac{27}{74}gy} = \sqrt{\frac{27\sqrt{3}}{148}gl}$$

$$v_2 = -\sqrt{\frac{75}{74}gy} = -\sqrt{\frac{75\sqrt{3}}{148}gl}$$

下方物体

$$\overrightarrow{v_3} = \left(-\sqrt{\frac{3}{74}gy}, \sqrt{\frac{8}{37}gy}\right) = \left(-\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{148}gl}, \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{37}gl}\right)$$

(b)

由动量守恒，假设$a_1 = 3a, a_2 = -5a, \overrightarrow{a_3} = (-a, a_y)$

两侧绳上的力为$12\mathrm{ma}, 10\mathrm{ma}$

Y 方向牛顿定律$mg - 11\sqrt{3}ma = ma_y$

绳两侧物体相对速度$v' = \sqrt{\frac{16\sqrt{3}}{37}gl}$

得到加速度关联$2a - \frac{\sqrt{3}}{2}a_y = \frac{{v'}^2}{l}$

解得

$$a = \frac{69\sqrt{3}}{1369}g$$

$$a_y = \frac{908}{1369}g$$